1) $y = 3e^x (x^2 - x + 1)^x$, $x = 1 \Rightarrow y = 3e \Rightarrow (1, 3e)$

$$y' = 3e^x (x^2-x+1)^x + 3e^x \Big(\underbrace{(x^2-x+1)^x}_{y_1} \Big)' \quad \text{---} \; (1)$$

$$y_1 = (x^2 - x + 1)^x \Rightarrow \ln y_1 = x \ln(x^2 - x + 1)$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \ln(x^2 - x + 1) + x \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow y_1' = (x^2-x+1)^x \left(\ln(x^2-x+1) + \frac{2x^2-x}{x^2-x+1} \right) \text{ olup,}$$

bu türev (1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$y' = 3e^x (x^2-x+1)^x + 3e^x \left((x^2-x+1)^x \left(\ln(x^2-x+1) + \frac{2x^2-x}{x^2-x+1} \right) \right)$$

bulunur.

$$m = y'|_{x=1} = 3e + 3e\left(\ln 1 + \frac{2-1}{1} \right) = 6e$$

olup, teğet denklemi

$$y - 3e = 6e(x-1)$$

$\boxed{y = 6ex - 3e}$ şeklindedir.

2 a $x>0$ olmak üzere $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{x^2+x} \Rightarrow$

$(x^2+x).f'(x)=f(x)$ olup $h(x)$ için türev alınırsa

$$h'(x)=\frac{-[1.f(x)+x.f'(x)].(x+1)+x.f(x).1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-(x+1)f(x)-(x^2+x)f'(x)+x.f(x)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-f(x)-(x^2+x)f'(x)}{(x+1)^2}=\frac{-f(x)+f(x)}{(x+1)^2}=0$$

bulunur. Yani $h(x)$ bir sabit fonksiyondur.

(b) $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{x\cdot(x+1)} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{-1}{x(x+1)} \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow$ $f(x)=u$ alınırsa

$\displaystyle\int \frac{du}{u}=\ln|x+1|-\ln|x|+c \Rightarrow \ln|u|=\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+c$

$\Rightarrow e^{\ln|f(x)|}=e^{\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}\cdot e^{c} \Rightarrow$

$f(x)=\dfrac{x+1}{x}\cdot e^{c}$ olur. $f(2)=3$ old.dan

$e^{c}=2$ bulunur. Yani $f(x)=2\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ olur.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $f(0^{+})=+\infty$, $f(0^{-})=-\infty$ old.dan

$x=0$ düşey asimtot, $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=2$ old.dan

$y=2$ yatay asimtot olur. $f''(x)=\dfrac{4}{x^3}$ olup

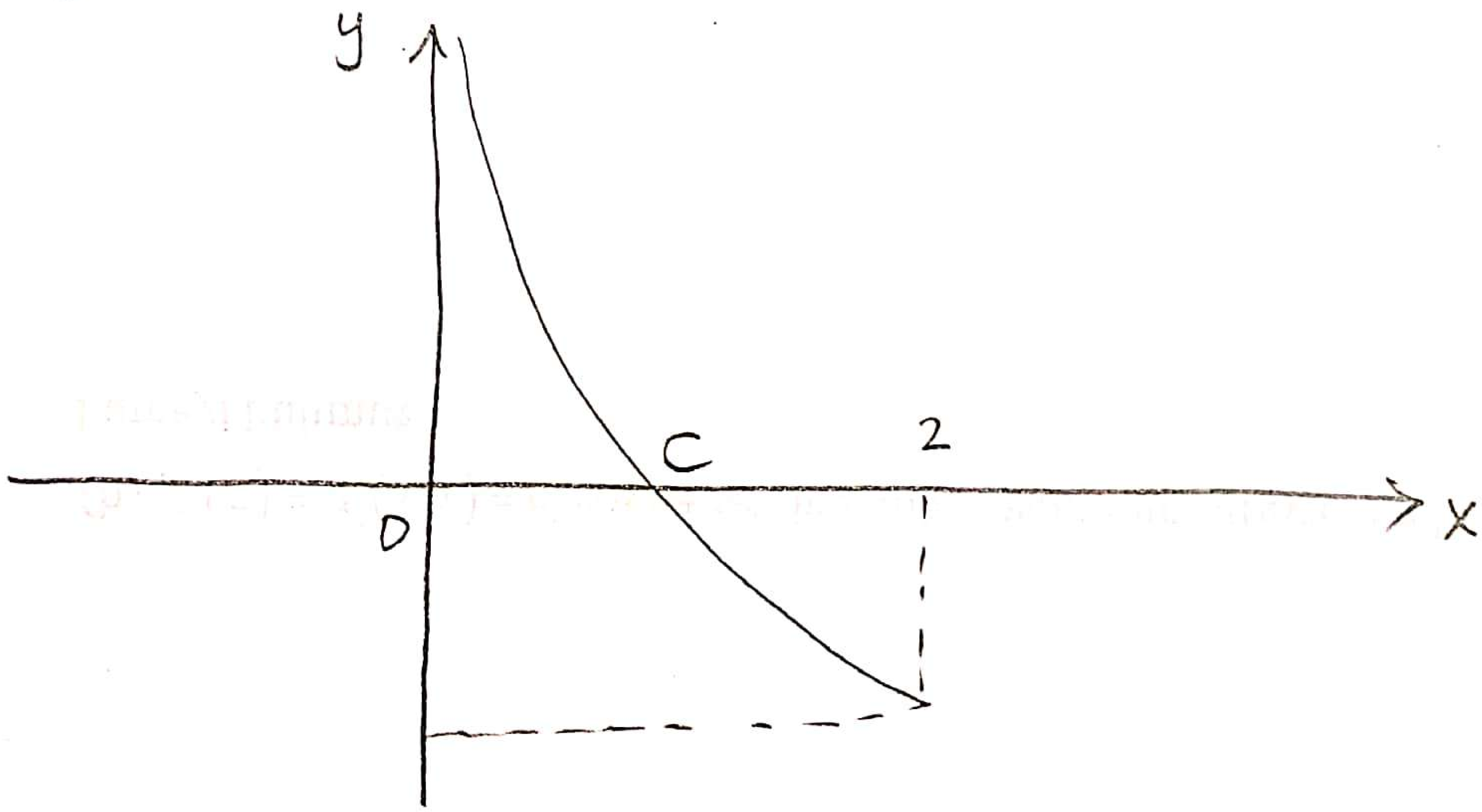
$x>0$ için yukarı bükey olur.

(2c) $g(x) = f(x) - e^x = 2 + \frac{2}{x} - e^x$ olsun. f fonksiyonu $(0,\infty)$-da; e^x ise $\mathbb{R}$-de türevlenebilir ve sürekli olduğundan g, $(0,\infty)$-da türevlenebilirdir. Yani süreklidir.

$g(0^+) = +\infty$ ve $g(2) = 3 - e^2 < 0$ old. dan

$g'(x) < 0$ olmasıyla (azalan) $g(c) = 0 \Rightarrow$

$f(c) = e^c$ o.ş. $\exists c \in (0,2)$ vardır.



3. a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x - 1}\,dx$

$\tan\frac{x}{2} = t$ denirse $\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ olur.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 1}\,dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{t+1}{(1+t^2)(t-1)}\,dt$$

$$\frac{t+1}{(1+t^2)(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{(A+B)t^2 + (C-B)t + (A-C)}{(t-1)(1+t^2)}$$

$$\Rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t+1}{(1+t^2)(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{t+1}{(1+t^2)(t-1)}\,dt = 2\left(\int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$= 2\left(\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right) + C$$

$$= \ln|t-1|^2 - \ln|1+t^2| + C = \ln\frac{(t-1)^2}{1+t^2} + C$$

$$= \ln\left(\frac{(\tan\frac{x}{2} - 1)^2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) + C = \cdots = \ln(1-\sin x) + C$$

3) b) $\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \int \sqrt{3-3\sin t}\cdot\sqrt{3}\cos t\,dt$

$x=\sqrt{3}\sin t$

$dx=\sqrt{3}\cos t\,dt$

$t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$

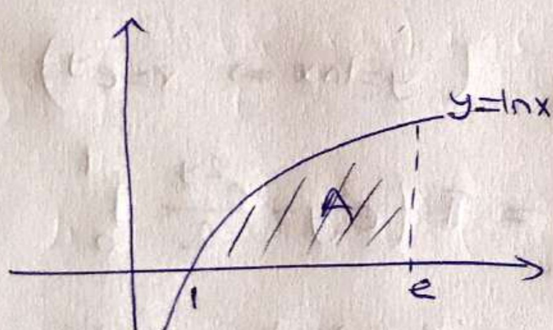
$= 3\int \cos^2 t\,dt$

$= 3\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$= \frac{3}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$

$= \frac{3}{2}\operatorname{arsin}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{3}{4}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

4.a)



$A=\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx = e\ln e-e+1=1$

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$dv=dx \Rightarrow v=x$

b) A bölgesinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi V_x ile gösterilirse,

$$V_x = \pi \cdot \int_1^e (\ln x)^2\,dx \quad , \quad u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2\ln x\,dx$$
$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= \pi \left(x\ln x \Big|_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{\text{(a) dan 1 old. biliniyor}} \right) = \pi\cdot(e-2)$$

Benzer şekilde V_y ise $(y = \ln x \Rightarrow x = e^y)$

$$V_y = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2y})\,dy = \pi \left(e^2 y - \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1\right.$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2+1) \quad \text{bulunur.}$$

c) $$V = \pi \cdot \int_0^1 \left((e+1)^2 - (e^y+1)^2\right) dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left((e+1)^2 - e^{2y} - 2e^y - 1\right) dy$$

$$= \pi \left((e+1)^2 y - \frac{e^{2y}}{2} - 2e^y - y \Big|_0^1\right.$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{2}\right)$$